

基于修正偶应力理论的微梁非线性 主共振尺度效应分析

丁楠
吉林财经大学

摘要 本文研究了具有冯·卡门几何非线性的静电驱动微梁的非线性动力学特性，在系统中引入了空气压膜阻尼力，应用修正偶应力理论及哈密顿原理建立了控制方程与边界条件。与经典弹性理论不同，本文的本构关系中引入了一个用于分析尺寸效应的特征尺度参数。应用多尺度法对简谐激励系统的主共振进行求解，并通过数值模拟对梁的厚度、宽度及梁与固定极间隙对系统振动的影响进行分析。结果表明：对于厚度较小的梁，尺度效应在共振中起关键作用；非线性挤压膜阻尼力对主共振影响显著。

关键词 非线性振动；空气压膜阻尼；尺度效应；特征尺度参数；多尺度法

DOI <https://doi.org/10.6914/aiescn.010307> **文章编号** 3079-7918.2025.0103.82-89

引言

微机电系统（Micro-electro-mechanical System, MEMS）技术的快速发展极大地拓展了微、纳尺度结构在振动冲击传感器、生物传感器、微致动器、微探针及麦克风等诸多领域的应用^①。作为 MEMS 器件的核心部件，微梁的动态特性（包括共振频率、振动模态及阻尼特性）直接影响器件的性能与可靠性。尺度效应与多物理场耦合作用之间的固有关联，常导致微尺度下出现复杂的非线性动态行为。

静电驱动是 MEMS 中广泛采用的驱动方式，具有动态响应速度快、功耗低、驱动效率高且易于微尺度集成等优点。当在两平行电极板上施加驱动电压时，会在不同方向产生静电力，进而驱动可动部件在相应方向上产生位移。为准确掌握静电驱动微谐振器的整体动态行为并实现其振动优化设计，有必要对其静、动态特性展开深入分析。

大量实验验证表明，经典连续介质力学虽适用于宏观结构的力学性能分析，但在微、纳尺度工程问题中，已经发现其所不能描述的显著的尺寸依赖行为。目前较为成熟的理论包括微极弹性理论、应变梯度理

©The Author(s) 2025. **Article History** Received: 14 July 2025; Accepted: 19 August 2025; Published: 30 September 2025. 人工智能教育研究 *Artificial Intelligence Education Studies*, ISSN 3079-7918 (Print), ISSN 3079-7926 (Online). Email: wtocom@gmail.com, <https://aies.irc>, <https://cpcl.hk>. Published by Creative Publishing Co., Limited .CPCL®. This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License, which permits non-commercial use, sharing, adaptation, distribution, and reproduction in any medium or format, provided the original author(s) and source are credited, and derivative works are licensed under the same terms.

^①Wang X, Shi Z, Yang Q, et al. Recent advancements of nonlinear dynamics in mode coupled microresonators: a review[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2025, 46(2): 209-232. DOI:10.1007/s10483-025-3211-6.

论、修正偶应力理论 (Modified Couple Stress Theory, MCST) 及非局部弹性理论^①。其中, 修正偶应力理论通过考虑变形能中转动梯度的对称部分, 可有效处理尺寸效应, 且仅包含一个特征尺寸参数, 大幅简化了偶应力理论的形式使其更适用于实际研究应用。

近年来, 学者们对微梁的弯曲、振动、屈曲及吸合稳定性展开了广泛研究^{②③④}。例如, 文献^⑤结合修正偶应力理论与铁木辛柯梁理论, 同时考虑尺寸效应与剪切效应, 对双层微梁的热弯曲问题进行了研究; 文献^⑥对微开关的静态吸合不稳定性进行了分析, 并提出了考虑几何非线性效应的欧拉-伯努利梁理论; 文献^⑦基于修正梯度弹性理论与铁木辛柯梁模型, 建立了微梁热屈曲的理论模型, 且捕捉到了微梁热屈曲行为中的尺寸效应; 文献^⑧构建了考虑非线性曲率、惯性及非线性静电力的悬臂微梁模型, 考察了其主共振与超谐波共振特性, 并对系统的动力学行为进行了分岔分析。

空气压膜阻尼 (Squeezing Film Damping, SQFD) 是微梁结构中耗散振动能量的主要机制之一, 尤其在非真空环境下其作用不可忽视^⑨。在微尺度器件中, 两平行板间的气膜会因压缩作用产生相对运动, 由于尺寸效应的影响, 压缩气膜的阻尼特性对系统动态特性具有显著作用。近年来, 学者们在空气压膜阻尼下微梁的理论建模、实验验证及其对非线性振动共振行为的影响等方面取得了显著进展。

在微、纳系统中, 空气压膜阻尼 (SQFD) 是核心阻尼来源, 其非线性特性导致系统振动呈现丰富动力学行为。现有研究多集中于非线性系统的幅频特性与稳定性分析, 较少同时考虑尺寸效应和非线性阻尼的影响^⑩。本文基于修正偶应力理论 (MCST) 研究微梁的尺寸相关的非线性振动问题, 主要工作包括: (1) 量化非线性阻尼对共振的影响; (2) 阐明尺寸效应在非线性振动中的作用。

二、控制方程

在本节中, 图 1 展示了一种交流静电驱动下的微机电谐振器, 其下部固定电极与微梁处于平行位置, 两者之间的静电激励由驱动电压产生。该微梁的长度、宽度、高度及初始间隙宽度分别为 L 、 h 、 b 和 g_0 。

^①Mirzaei S, Hejazi M, Ansari R. Size-dependent behaviour of in-plane bi-directional functionally graded porous microplates with variable thickness based on the modified strain gradient theory and IGA[J]. Thin-Walled Structures, 2025, 211: 113-144. DOI:10.1016/j.tws.2025.113144.

^②Qing H. Size-dependent nonlinear forced vibration of microbeam using two-phase local/nonlocal viscoelastic integral model with thermal effects[J]. Journal of Vibration and Control, 2024, 30(19-20): 4421-4437. DOI:10.1177/10775463231210030.

^③Farvandi A, Karami Mohammadi A. Nonlinear vibration analysis of hyperelastic and dielectric microbeams with a control parameter using nonlinear normal modes[J]. Nonlinear Dynamics, 2025, 113(3): 2045-2059. DOI:10.1007/s11071-024-10367-7.

^④Liu Z, Xu Y, Lv Q, et al. Amplitude deflection in a nonlinear MEMS resonator under parametric excitation[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2024, 163: 104754. DOI:10.1016/j.ijnonlinmec.2024.104754.

^⑤Ye X, Ma H, Liu X, et al. Size-dependent thermal bending of bilayer microbeam based on modified couple stress theory and Timoshenko beam theory[J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2023, 100: 105029. DOI:10.1016/j.euromechsol.2023.105029.

^⑥Vesal R, Amiri A. Size-dependent nonlinear pull-in instability of a bi-directional functionally graded microbeam[J]. Steel and Composite Structures, 2024, 52(5): 501-513. DOI:10.12989/scs.2024.52.5.501.

^⑦Long C, Zhou W, Cai Z, et al. Coupling of shearing and size effects on thermal buckling of microbeams[J]. Acta Mechanica, 2025, 236(2): 729-743. DOI:10.1007/s00707-024-04167-8.

^⑧Azizi S, Madinei H, Taghipour J, et al. Bifurcation analysis and nonlinear dynamics of a capacitive energy harvester in the vicinity of the primary and secondary resonances[J]. Nonlinear Dynamics, 2022, 108(2): 873-886. DOI:10.1007/s11071-022-07271-3.

^⑨Jia Z, Sun J, Wang X, et al. Dissipation manipulation via programmable holes and bumps: A complete model to evaluate and harness squeeze-film damping of resonators[J]. Mechanical Systems & Signal Processing, 2025(4):229. DOI:10.1016/j.ymssp.2025.112574.

^⑩He J, Jiang D, Marchesiello S, et al. Analytical model of curvic coupling and application in nonlinear vibration analysis of a squeeze film damper-rolling bearing-rotor system[J]. Applied Mathematical Modelling, 2025, 137: 115721. DOI:10.1016/j.apm.2024.115721.

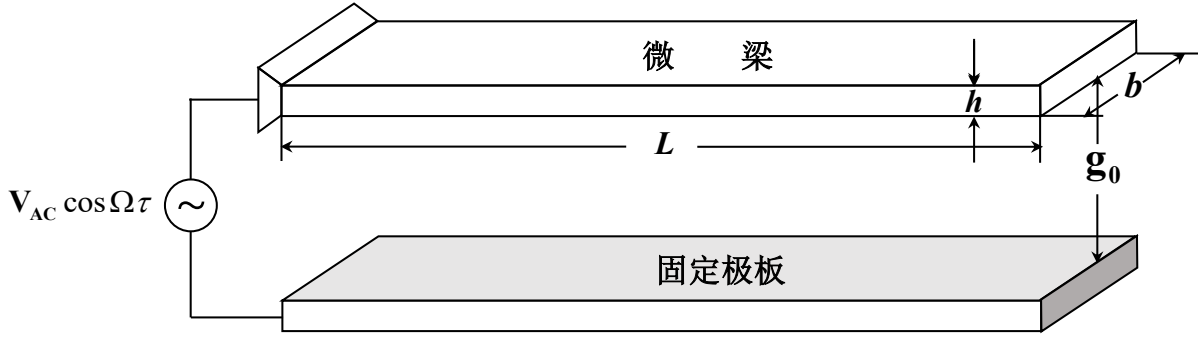


图 1: 微简支梁的几何参数及载荷分布

在之前研究中，基于修正偶应力理论、哈密顿原理并引入冯·卡门几何非线性的微欧拉梁控制方程可以写成下面的形式：

$$-(EI + GAl^2)w^{(4)} + \frac{3}{2}EAw'^2w'' - \frac{c_sb^3}{(g_0 - w)^3}\dot{w} - \rho A\ddot{w} + \frac{\epsilon_0bv_{ac}^2\cos^2(\omega_0t)}{2(g_0 - w)^2} = 0. \quad (1)$$

这里 w 表示微梁的挠度，且有 $w' = \partial w / \partial x$ ， $w^{(4)} = \partial^4 w / \partial x^4$ ， $\dot{w} = \partial w / \partial t$ ； A ， ρ ， E ， G 及 I 分别表示微梁横截面面积、质量密度、杨氏模量、剪切模量及微梁横截面惯性矩； c_s ， ϵ_0 ， v_{ac} ，及 ω_0 分别表示空气粘度系数、真空介电常数、直流电极间外加电势差及频率； l 表示材料特征尺度参数。

将上述方程按照下述关系进行无量纲化

$$\tau = \frac{t}{T}, V = \frac{v_{ac}}{V_0}, \Omega = 2\omega_0 T \\ X = \frac{x}{L}, C_s = \lambda c_s, W = \frac{w}{g_0}.$$

可以得到如下形式

$$T = \sqrt{\frac{\rho AL^4}{EI\pi^4}}, V_0 = \sqrt{\frac{2EIg_0^3\pi^4}{\epsilon_0 b L^4}}, \lambda = \frac{L^4}{EI\pi^4 T}. \\ -(1 + 12\frac{G}{E}\frac{l^2}{h^2})W^{(4)} + 18\frac{g_0^2}{h^2}W'^2W'' - \pi^4\ddot{W} + \frac{V^2\pi^4}{2(1 - W)^2}[1 + \cos(\Omega\tau)] - \frac{C_sb^3\pi^4}{g_0^3(1 - W)^3}\dot{W} = 0. \quad (2)$$

为了进一步简化上述形式，对静电力及空气压膜阻尼围绕 $W = 0$ 进行泰勒展开，考虑到空气压膜阻尼带来的非线性保留其展开项的前两项，对于静电力仍然保留其前两项线性项，具体展开式如下：

$$1/(1 - W)^2 \approx 1 + 2W \\ 1/(1 - W)^3 \approx 1 + 3W + 6W^2$$

则控制方程进一步简化为

$$-(1 + 12\frac{G}{E}\frac{l^2}{h^2})W^{(4)} + 18\frac{g_0^2}{h^2}W'^2W'' - \pi^4\ddot{W} + \frac{V^2\pi^4}{2}(1 + 2W)[1 + \cos(\Omega\tau)] \\ - \frac{C_sb^3\pi^4}{g_0^3}(1 + 3W + 6W^2)\dot{W} = 0. \quad (3)$$

上式中，非线性阻尼项耦合了系统的位移和速度，项 $\pi^4 V^2 / 2$ 由于仅影响系统的静态平衡位置，故在后续讨论中予以省略。

下文中我们将采用多尺度法详细研究非线性简支微梁的力学行为，并分析非线性阻尼力和尺寸效应在系统非线性主共振中产生的影响。本文仅考虑主共振，类似的讨论也适用于超谐共振及亚谐共振。

三、主共振分析 ($\Omega \approx p$)

为了将上述非线性偏微分方程简化为常微分方程，引入伽辽金法如下：

$$W(X, \tau) = \sin(\pi X)S(\tau). \quad (4)$$

式中 $\sin(\pi X)$ 是满足边界条件的形函数， $S(\tau)$ 是与时间相关的项。

将上述公式带入控制方程 (3) 中并积分得到

$$\ddot{S}(\tau) + k_1 S(\tau) = -k_2 S^3(\tau) + k_3 \cos(\Omega\tau) + k_4 S(\tau) \cos(\Omega\tau) - k_5 \dot{S}(\tau) - k_6 S(\tau) \dot{S}(\tau) - k_7 S^2(\tau) \dot{S}(\tau) \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} k_1 &= 1 + 12 \frac{G}{E} \frac{l^2}{h^2} - V^2, & k_2 &= 6 \frac{g_0^2}{h^2}, & k_3 &= \frac{\pi V^2}{4}, & k_4 &= V^2, \\ k_5 &= \frac{C_s b^3}{g_0^3}, & k_6 &= \frac{3\pi}{4} \frac{C_s b^3}{g_0^3}, & k_7 &= 4 \frac{C_s b^3}{g_0^3}. \end{aligned} \quad (6)$$

为了分析系统的动力学行为，上述方程的近似解可以通过多尺度法进行求解，为了简单起见，我们假设：

$$S(\tau) = S_0(T_0, T_1) + \epsilon S_1(T_0, T_1) + O(\epsilon^2) \quad (7)$$

其中， $T_n = \epsilon^n \tau$, $n = 0, 1$ ，且有

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} = D_0^1 + \epsilon D_1^1 + O(\epsilon^2), \\ \frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\epsilon D_0^1 D_1^1 + O(\epsilon^2). \end{cases} \quad (8)$$

其中 $D_i^j = \partial^j / \partial T_i^j$, $i = 0, 1$, $j = 1, 2$ 。

则有

$$D_0^2 S_0 + k_1 S_0 = 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 S_1 + k_1 S_1 &= -2D_0^1 D_1^1 S_0 - k_2 S_0^3 + k_3 \cos(\Omega\tau) + k_4 S_0 \cos(\Omega\tau) \\ &\quad - k_5 D_0^1 S_0 - k_6 S_0 D_0^1 S_0 - k_7 S_0^2 D_0^1 S_0 \end{aligned} \quad (10)$$

为了求解上述方程，将上式的解表示如下

$$S_0 = A(T_1) \exp(ipT_0) + cc \quad (11)$$

这里， $p = \sqrt{k_1}$ ， cc 表示前项的共轭，复值函数 $A(T_1)$ 可按如下极坐标形式写出

$$A(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) \exp[i\beta(T_1)] \quad (12)$$

这里 $a(T_1)$ 及 $\beta(T_1)$ 是实值函数, 将上述方程带入到方程 (9) 和 (10) 中可得

$$\begin{aligned} D_0^2 S_1 + k_1 S_1 = & -[2ipD_1^1 A(T_1) + 3k_2 A^2(T_1)\bar{A}(T_1) + ik_5 p A(T_1) + ik_7 p A^2(T_1)\bar{A}(T_1)]\exp(ipT_0) \\ & -[ik_6 p A^2(T_1)]\exp(2ipT_0) - [k_2 A^3(T_1) - ik_7 p A^3(T_1)]\exp(3ipT_0) \\ & + \frac{1}{2}k_3 \exp i\Omega T_0 + \frac{1}{2}k_4 [A(T_1)\exp[i(\Omega + p)T_0] + \bar{A}(T_1)\exp[i(\Omega - p)T_0]] + cc \end{aligned} \quad (13)$$

为进行主共振分析, 引入一个失谐参数 σ 以替代激励频率, 并对长期项进行标记, 具体如下

$$\Omega = p + \epsilon\sigma, \text{ 其中 } \sigma = o(1). \quad (14)$$

将式 (14) 代入式 (13), 为了消除式 (13) 中的长期项, 需满足以下条件

$$2ipD_1^1 A(T_1) + 3k_2 A^2(T_1)\bar{A}(T_1) + ik_5 p A(T_1) + ik_7 p A^2(T_1)\bar{A}(T_1) - \frac{1}{2}k_3 \exp(i\sigma T_1) = 0 \quad (15)$$

令 $\theta(T_1) = \sigma T_1 - \beta(T_1)$, 则实部与虚部可以分别表示成如下形式

$$\begin{cases} D_1^1 a(T_1) = -\frac{1}{8}k_7 a^3(T_1) - \frac{1}{2}k_5 a(T_1) + \frac{1}{2p}k_3 \sin \theta(T_1), \\ a(T_1)D_1^1 \theta(T_1) = a(T_1)\sigma - \frac{3}{8p}k_2 a^3(T_1) + \frac{1}{2p}k_3 \cos \theta(T_1). \end{cases} \quad (16)$$

稳态主共振可通过 $D_1 a = 0$ 及 $D_1 \theta = 0$ 求得, 具体如下

$$\begin{cases} -\frac{1}{8}k_7 a_0^3 - \frac{1}{2}k_5 a_0 + \frac{1}{2p}k_3 \sin(\theta_0) = 0, \\ a_0 \sigma - \frac{3}{8p}k_2 a_0^3 + \frac{1}{2p}k_3 \cos(\theta_0) = 0. \end{cases} \quad (17)$$

这里 a_0 及 θ_0 分别表示振幅及相位。消去变量 θ_0 , 可得频率响应方程如下

$$[k_5 p + \frac{1}{4}k_7 p a^2(T_1)]^2 + [2p\sigma - \frac{3}{4}k_2 a^2(T_1)]^2 = [\frac{k_3}{a}(T_1)]^2 \quad (18)$$

从公式 (18) 中可以进一步得到系统的振幅峰值满足如下方程:

$$\frac{k_7}{4}a_{0\max}^3(T_1) + k_5 a_{0\max}(T_1) = \frac{k_3}{p} \quad (19)$$

对于一个给定的, 求解方程 (19) 可以得到 $a_{0\max}$ 及 $\sigma_{\max}$, 因此, 稳态主共振的一阶近似振幅为:

$$S(\tau) = a_0 \cos(\Omega\tau - \gamma) + O(\epsilon) \quad (20)$$

四、结论

为了探讨系统中各个参数对主共振的影响, 我们设定参数如下: $l = 1.76 \times 10^{-5}m$, $b = 15l$, $h = l$, $g_0 = 4l$, $C_s = 2.0 \times 10^{-5}$ 及 $V = 0.3$, 其中微梁厚度 h , 微梁宽度 b 及微梁与固定下极板间距 g_0 对微梁振动的影响如图 2-4 所示。

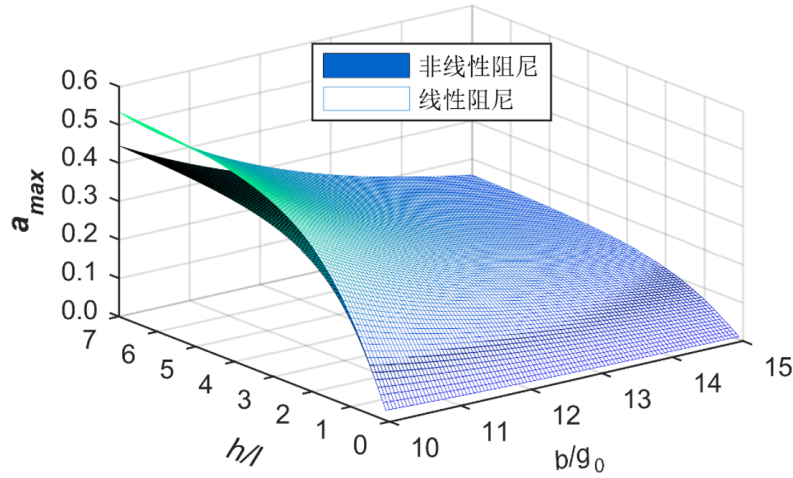


图 2: 主共振振幅峰

图 2 中的三维平面图展示了峰值振幅随着微梁厚度 h 与特征尺度参数 l 的比值 h/l 及微梁宽度 b 与微梁与下极板间隙 g_0 比值 b/g_0 的变化呈现出的非线性变化。为了进一步研究上述参数对于振幅峰值的影响，峰值振幅面的横向和轴向截面分别如图 3 和图 4 所示。

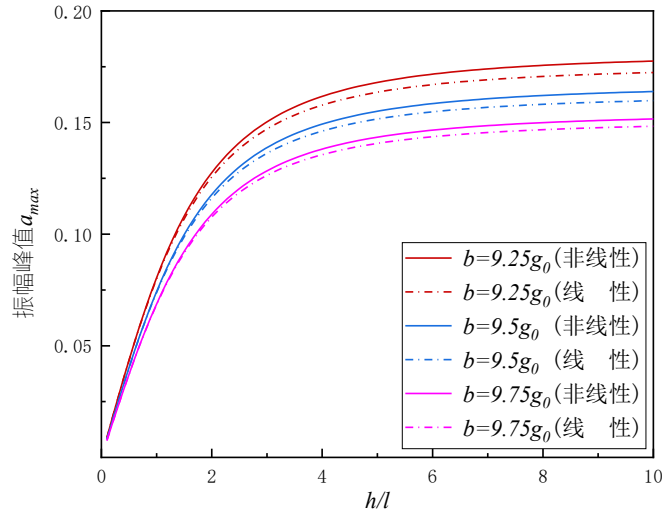


图 3: 主共振振幅峰值尺度效应

图 3 中，随着微梁厚度 h 的不断增长，振幅峰值 a_{max} 逐渐增加，且在微梁厚度 h 接近特征尺度参数 l ($h \approx l$) 的时候增长最快；在微梁厚度 h 远离特征尺度参数 l ($h \geq 5l$) 的时候增长逐渐放缓，说明梁在微尺度下刚度显著增强，体现了显著的尺度效应。同时，在微梁处于相同厚度 h 下，非线性振动的峰值均高于线性振动的峰值，说明非线性阻尼使得微梁振动幅值增大。因此，若仅基于线性理论对系统进行讨论，则可能低估振动幅值。随着微梁宽度 b 与微梁和下极板间隙 g_0 的比值 b/g_0 逐渐增加，微梁振幅峰值逐渐降低，体现出了空气压膜阻尼的作用。阻尼越大，微梁振幅越小；反之阻尼越小，微梁振幅越大。同时，当比值 b/g_0 较小时，非线性振幅与线性振幅差距较大；而当比值 b/g_0 较大时，非线性振幅与线性振幅差距较小，说明 b/g_0 越大，空气压膜阻尼中非线性的作用越小。

微梁宽度 b 与微梁与下极板间隙 g_0 是空气压膜阻尼的两个重要影响因素，空气压膜阻尼的作用，阻尼越大，微梁振幅越小，反之阻尼越小，微梁振幅越大，图 4 中，随着微梁宽度 b 与微梁与下极板间隙 g_0

的比值逐渐增加,微梁振幅峰值逐渐呈现出非线性下降的趋势,在比值较小时下降速度较快,随着比值逐渐增大,下降速度逐渐放缓;当微梁厚度 h 与特征尺度参数 l 的比值较小时,微梁振幅较低,比值较大时,微梁振幅逐渐升高,且在同一厚度时,非线性振幅高于线性振幅,与图3结论一致;微梁厚度 h 与特征尺度参数 l 的比值 h/l 较大时,非线性振幅与线性振幅的幅值差距较大,而当比值 h/l 较小时,非线性振幅与线性振幅的幅值差距较大,说明微梁厚度越小,微梁刚度越大,非线性阻尼的作用越不显著。

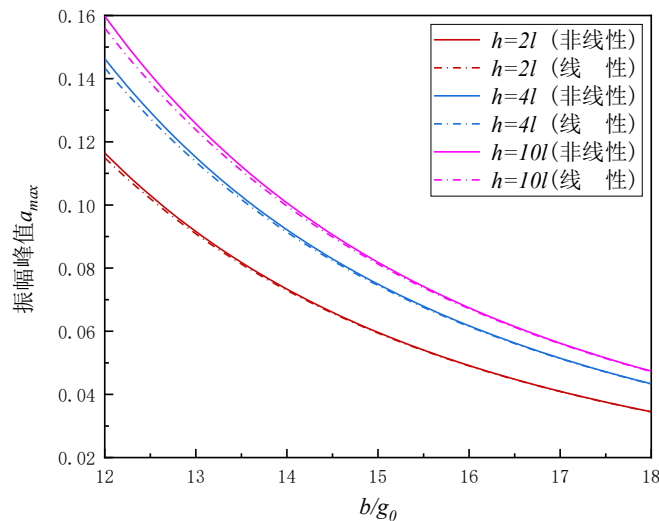


图 4: 主共振振幅峰值受空气压膜阻尼影响

本文基于修正偶应力理论 (MCST) 构建了具有冯·卡门几何非线性的静电驱动微梁模型的尺寸效应模型,并在系统中考虑了非线性空气压膜阻尼力对系统的影响。利用哈密顿原理推导得到控制方程及边界条件,并通过伽辽金法及多尺度法对频率响应方程进行了求解。本文主要聚焦微梁的几何参数及非线性空气压膜阻尼对系统主共振的振幅与频率的影响,并借助系统的频率响应方程分析共振特性。研究表明,特征长度尺度参数 l 、梁的厚度 h 、宽度 b 、微梁与固定极板间隙 g_0 等参数对振动共振起到的关键作用。发现非线性空气压膜阻尼的引入显著增大了主共振的振幅;当 h/l 较小时,修正偶应力理论预测的受迫振动表现出显著的尺寸效应。换言之,在对微梁进行建模时,若忽视空气压膜阻尼的非线性作用,可能使得预测的振幅峰值偏低。

基金项目 吉林省教育厅科学技术研究项目“基于物理信息神经网络的微纳机械构件振动问题研究”(基金号 JJKH20240195KJ)。

作者简介 丁楠,女,1988 年出生,汉族,博士,吉林财经大学管理科学与信息工程学院副教授,硕士研究生导师,研究方向为动力学与控制、机器学习, Email: dingnan@jlu.edu.cn

引用本文 丁楠. 基于修正偶应力理论的非线性主共振尺度效应分析 [J]. 人工智能教育研究, 2025, 1(3):82-89. <https://doi.org/10.6914/aiescn.010307>.

Cite This Article Nan DING.(2025). Size effects of the nonlinear primary resonance analysis of a microbeam based on the modified couple stress theory. *Artificial Intelligence Education Studies(Réngōng zhìnéng jiàoyù yánjiū)*, 1(3):82-89. <https://doi.org/10.6914/aiescn.010307>

Size effects of the nonlinear primary resonance analysis of a microbeam based on the modified couple stress theory

Nan DING

School of Management Science and Information Engineering, Jilin University of Finance and Economics, Changchun, China 130117

Abstract In this paper, the nonlinear dynamics of an electrostatically actuated microbeam with von Kármán geometric nonlinearity and squeeze-film damping are studied. The governing equations and the boundary conditions are developed using the modified couple stress theory (MCST) and Hamilton's principle, the size-dependent responses are investigated for the primary resonances. Different from the classical elasticity theory, a characteristic length scale parameter for analyzing the size effect is introduced into the constitutive relation in this study. The multiple scale method is employed to solve the primary resonance, and the effects of the thickness, width of the beam and gap between electrodes on the frequency response of the resonance, the peak amplitude, nonlinearity of the system are investigated. The results show that: for microbeams with small thickness, the size effect plays a crucial role in resonance; the nonlinear squeeze film damping force exerts a significant influence on the primary resonance.

keywords nonlinear vibration, air squeeze film damping force, size effect, characteristic length scale parameter, multiple scales method

(责任编辑: 丁勇 Email: cpcl@cpcl.hk)